Ćwiczenie 8

WYZNACZANIE MOMENTÓW BEZWŁADNOŚCI I ŚRODKA CIĘŻKOŚCI BRYŁ I FIGUR PŁASKICH

8.1. WSTĘP

Celem ćwiczenia jest doświadczalne wyznaczenie momentów bezwładności brył obrotowych oraz środków ciężkości brył nieregularnych. Zakres materiału teoretycznego niezbędny do zrozumienia ćwiczenia obejmuje: analityczne wyznaczanie masowych momentów bezwładności brył obrotowych względem osi, kinematykę i dynamikę bryły sztywnej w ruchu obrotowym. W ćwiczeniu wyznaczone zostaną doświadczalnie momenty bezwładności wybranych brył obrotowych oraz położenie środków ciężkości kilku brył nieregularnych .

8.2. WPROWADZENIE TEORETYCZNE

Momentem bezwładności ciała materialnego względem dowolnie obranej osi nazywamy granicę, do której dąży suma iloczynów mas elementów, na które podzieliliśmy ciało, przez kwadraty odległości tych elementów od wspomnianej osi, gdy liczba elementów dąży do nieskończoności przy jednoczesnym dążeniu* do zera ich wymiarów. Aby przybliżyć powyższą definicję, weźmy dowolne ciało materialne o masie *m* przedstawione na rys. 8.1 i podzielmy na *n* elementów, z których jeden, dowolny o masie *m. (i* = 1, ..., *n)* oznaczono na rysunku. Jeśli teraz dla przykładu za dowolną oś, względem której moment bezwładności określamy, przyjmiemy oś *Oz,* to według definicji moment bezwładności względem tej osi będzie równy

$$I_z = \lim \sum_{n=1}^{n} m_i h_i^2 \tag{8.1}$$

W analogiczny sposób można zdefiniować momenty bezwładności układu punktów materialnych względem punktu *O* oraz względem płaszczyzny II. Otrzymamy więc:

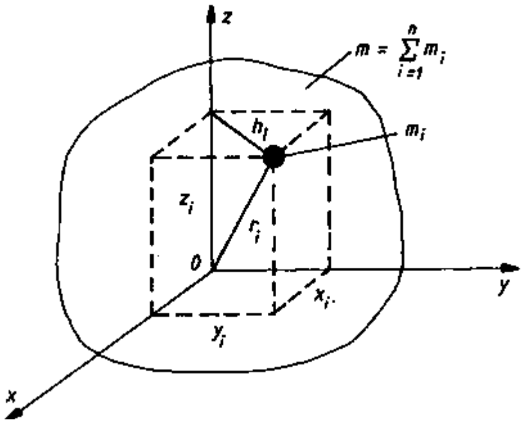
$$I_o = \sum_{i=1}^{n} m_i r_{oi}^2 \tag{8.2}$$

$$I_{II} = \sum_{i=1}^{n} m_i r_{IIi}^2 \tag{8.3}$$

Ponieważ jednak wyrażenia (8.2) i (8.3) przy ilości mas m_i dążącej do nieskończoności w granicznym przypadku są równe całce, to otrzymamy w przypadku równania (6.1):

$$I_z \overset{def}{=} \int_m h^2 dm = \int_\upsilon \rho h^2 dV \tag{8.4}$$

gdzie p — gęstość ciała.



Rys. 8.1. Opis położenia elementu o masie m. dowolnej bryły

Ponieważ w ogólności $h^2 = x^2+y^2$, to po podstawieniu do wzoru (8.4) otrzymamy

$$I_z = \int_m (x^2 + y^2)dm = \int_\upsilon \rho(x^2 + y^2)dV$$

Postępując podobnie dla osi Ox i Oy otrzymamy następujące wyrażenie na momenty bezwładności względem pozostałych osi układu $Oxyz$:

$$I_z = \int_m (y^2 + z^2)dm = \int_\upsilon \rho(y^2 + z^2)dV = \int_m z^2 dm + \int_m y^2 dm \tag{8.5}$$

$$I_z = \int_m (x^2 + z^2)dm = \int_\upsilon \rho(x^2 + z^2)dV = \int_m x^2 dm + \int_m z^2 dm$$

Całki typu $\int z^2 dm, \int x^2 dm, \int y^2 dm$ występujące we wzorach (8.4) i (8.5) nazywają się *momentami względem płaszczyzn* układu współrzędnych. Ponieważ z^2 jest kwadratem odległości elementu dm od płaszczyzny Oxy, wobec tego $\int z^2 dm$ jest momentem bezwładności względem tej płaszczyzny. Dwie następne całki są odpowiednio momentami względem płaszczyzny Ozy i Ozx.

Można wykazać, że moment bezwładności ciała względem dowolnego punktu O jest równy sumie momentu względem środka masy C i iloczynu masy ciała przez kwadrat odległości danego punktu od środka masy. *Zależność* ta może być zapisana wzorem

$$I_0 = I_C + mr_C^2 \tag{8.6}$$

Również moment bezwładności względem dowolnej płaszczyzny (prostej) jest równy sumie momentu bezwładności względem płaszczyzny (prostej) równoległej do danej i przechodzącej przez środek masy oraz iloczynu masy przez kwadrat odległości płaszczyzn (prostych). Odpowiednie wzory mają postać:

$$I_{II} = I_{IIXZ} + my_C^2 \tag{8.7}$$

$$I_x = I_X + md^2 \tag{8.8}$$

gdzie: y_c jest odległością między równoległymi płaszczyznami *Uxz* i *ILXZ, ad* — odpowiednio między równoległymi prostymi x i X.

W analizie dynamicznego zachowania się ciał sztywnych wprowadza się pojęcie *momentów odśrodkowych,* zwanych również momentami dewiacyjnymi lub momentami zboczenia. Z definicji momentem odśrodkowym ciała względem dwóch prostopadłych płaszczyzn nazywamy granicę sumy iloczynów mas elementów ciała przez odległość tych elementów od danych płaszczyzn. Można więc przykładowy moment odśrodkowy względem np. płaszczyzn *XY* i *YZ* prostokątnego układu współrzędnych określić wzorem

$$I_{xz} = \int_m xzdm \tag{8.9}$$

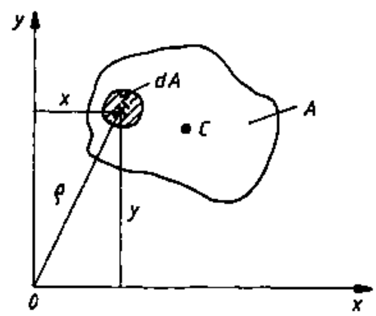
Momenty odśrodkowe (w odróżnieniu od momentów bezwładności) mogą przyjmować wartości zarówno dodatnie, jak i ujemne. Można więc zauważyć, że jeśli ciało ma płaszczyznę symetrii, to moment odśrodkowy względem tej płaszczyzny i płaszczyzny do niej prostopadłej jest równy zeru.

Jeśli momenty odśrodkowe dowolnego ciała względem trzech par płasz czyzn układu współrzędnych są równe zeru, to osie współrzędnych są głów nymi osiami bezwładności tego ciała. Jeżeli początek tych osi znajduje się w środku masy ciała, to osie te nazywają się głównymi centralnymi osiami bezwładności.

Jeżeli ciało ma oś symetrii, to oś ta jest jego główną centralną osią bezwładności, jeżeli natomiast ciało ma płaszczyznę symetrii, to każda prosta prostopadła do tej płaszczyzny i przechodząca przez środek masy jest główną centralną osią bezwładności.

Momenty bezwładności figur płaskich

Momenty bezwładności figur płaskich są ważnymi wielkościami geometrycznymi, charakteryzującymi przekroje poprzeczne prętów. Są wykorzystywane w obliczeniach wytrzymałościowych.
Dana jest figura płaska o polu *A* (rys. 8.2). Element pola *dA* określony współrzędnymi *x* i *y* jest odległy od początku układu współrzędnych o ρ.



Rys. 8.2. Figura płaska z wyróżnionym elementem *dA*

Wprowadza się następujące definicje:
— momenty bezwładności względem osi x i y układu współrzędnych (por. wzór (8.4)

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad I_y = \int_A x^2 dA$$

— moment bezwładności względem układu osi (dewiacji, odśrodkowy) (por. wzór (8.9))

$$I_{xy} = \int_A xydA \tag{8.9a}$$

moment dewiacji jest równy zeru, gdy przynajmniej jedna z osi układu jest osią symetrii;

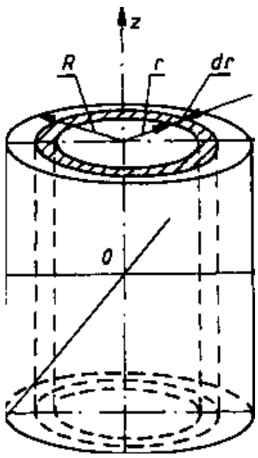
— biegunowy moment bezwładności (moment względem punktu)

$$I_o = \int \rho^2 dA$$

Jednostką momentów bezwładności figur płaskich jest m^4. Całkowanie w powyższych zależnościach odbywa się po powierzchni przekroju.

W wytrzymałości materiałów istotna jest znajomość układu głównych centralnych osi bezwładności — jest to taki układ, którego początek pokrywa się ze środkiem ciężkości przekroju C, a moment dewiacji względem tych osi jest równy zeru. Z układem tym związane są główne centralne momenty bezwładności przekroju.

Uwaga! Definicje określające: moment bezwładności ciał materialnych (masowe momenty bezwładności) oraz momenty bezwładności figur płaskich są analogiczne, jednak należy sobie zdawać sprawę z jakościowej różnicy między tymi pojęciami:
— moment bezwładności ciała jest ważnym parametrem masowym (jednostka kg-m^2), wykorzystywanym w dynamice (ruch obrotowy),
— moment bezwładności figury płaskiej (przekroju) jest parametrem geometrycznym (jednostka m^4), istotnym w obliczeniach wytrzymałościowych (zginanie, skręcanie).



Rys. 8.3. Wyznaczanie momentu bezwładności walca obrotowego

Przykład. Jednorodny walec obrotowy
Moment bezwładności walca obrotowego względem jego osi obrotu (oś *Oz* na rys. 8.3) wyprowadzimy bezpośrednio z definicji (8.4). W tym celu wycinamy myślowo elementarną

warstwę o grubości **dr** ograniczoną dwiema powierzchniami walcowymi o promieniu ***r*** i **r + dr.** Ponieważ odległość ***h*** całej warstwy równa się ***r***

$$dV = 2\pi rHdr$$

to moment bezwładności

$$I_z = \int_V \rho h^2 dV = \int_0^R \rho h^2 (2\pi rHdr) = \int_0^R \rho r^3 2\pi Hdr =$$
$$= 2\pi\rho H \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho H \left(\frac{r^4}{4} \right)_0^R = \frac{\pi\rho HR^4}{2}$$

Uwzględniając, że masa walca wynosi $m = \pi R^2 H\rho$**,** otrzymujemy

$$I_z = \frac{mR^2}{2} \tag{8.10}$$

Następnym, ważnym pojęciem z geometrii mas jest środek ciężkości bryły.

Środkiem ciężkości bryły sztywnej **nazywamy taki punkt C, który ma tę** własność, że stale przechodzi przez niego wypadkowa układu sił ciężkości działających na układ punktów materialnych tworzących daną bryłę.
Z powyższej definicji wynikają następujące wyrażenia na położenie środka ciężkości bryły w prostokątnym układzie współrzędnych *Oxyz:*

$$x_c = \frac{\int_V g\rho xdV}{\int_V g\rho dV} = \frac{\int_V g\rho xdV}{G} = \frac{\int_V \rho xdV}{m} \tag{8.11a}$$

$$y_c = \frac{\int_V g\rho ydV}{\int_V g\rho dV} = \frac{\int_V g\rho ydV}{G} = \frac{\int_V \rho ydV}{m} \tag{8.11b}$$

$$z_c = \frac{\int_V g\rho zdV}{\int_V g\rho dV} = \frac{\int_V g\rho zdV}{G} = \frac{\int_V \rho zdV}{m} \tag{8.11c}$$

gdzie masa bryły $m = \int_V \rho dV$, natomiast całki $\int_V \rho xdV, \int_V \rho ydV, \int_V \rho zdV$ są statycznymi momentami bezwładności odpowiednio względem płaszczyzn *Oyz, Ozx, Oxy, G* - jest ciężarem bryły, *g* — przyspieszeniem ziemskim.

8.2.1. WYZNACZANIE MOMENTÓW BEZWŁADNOŚCI. METODA WYBIEGU

Zgodnie z definicją przyspieszenia kątowego ε dla ruchu obrotowego jednostajnie przyspieszonego mamy

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varepsilon_0 = const.$$

Całkując to równanie względem czasu *t* znajdujemy prędkość kątową

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon_0 t + \omega_0 \tag{8.12}$$

Stała całkowania ω_0 jest tutaj równa prędkości kątowej ciała w chwili $t = 0$.

Aby wyznaczyć kąt obrotu φ w funkcji czasu, całkujemy równanie (8.12) po czasie i otrzymujemy: $\varphi(t) = \frac{\varepsilon_0}{2} t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$, przy czym stała całkowania φ_0 jest równa wartości kąta obrotu w chwili początkowej $t = 0$.

Za pomocą wzoru (8.12) można wyznaczyć prędkość początkową ω_0 i przyspieszenie ε_0 = const, jeśli znane są prędkości kątowe ω_1 i ω_2 odpowiadające znanym chwilom czasu t_1 i t_2. Mamy $\omega_1 = \varepsilon_0 t_1 + \omega_0, \omega_2 = \varepsilon_0 t_2 + \omega_0$, stąd otrzymujemy:

$$\omega_0 = \frac{\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2}{t_2 - t_1}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$$

Jeśli założymy dla celów związanych z ćwiczeniem, że ω_0 jest znane i odpowiada chwili czasu t_1 czyli $\omega_0 = \omega_1$, $\omega_2 = 0$ co odpowiada chwili czasu $t_2 = t_n (t_n$ - czas pomierzony), to otrzymamy wzory (8.13) i (8.14), które będziemy wykorzystywać w ćwiczeniu:

$$\varepsilon_0 = \frac{0 - \omega_0}{t_p - 0} = \frac{-\omega_0}{t_p} = -\frac{2\pi n}{60 t_p} \tag{8.13}$$

Znak minus oznacza, że analizowany ruch jest ruchem jednostajnie opóźnionym.

Drugie prawo dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego mówi, że ruch jednostajnie przyspieszony (opóźniony) jest skutkiem działania stałego co do wartości niezrównoważonego momentu (pary sił) zgodnie z zależnością

$$M = I\varepsilon_0 = I\frac{-\omega_0}{t_p} = -I\frac{2\pi n}{60 t_p} \tag{8.14}$$

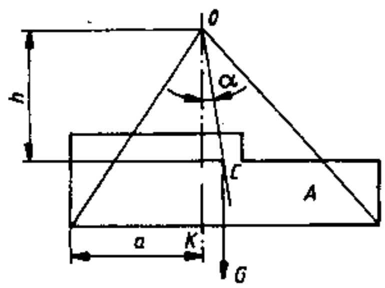
gdzie ***I*** - moment bezwładności względem osi obrotu ciała. Znak minus przy momencie oznacza, że jest to moment hamujący.

Ze wzoru (8.14) możemy wyznaczyć nieznany moment bezwładności ***I***. Ze względu na to, że wielkością mierzoną jest czas t_n (czas po jakim układ osiągnie prędkość kątową $\omega = 0$, tę metodę wyznaczania momentów bezwładności nazywać będziemy **metodą pomiaru czasu wybiegu.**

8.2.2. WYZNACZANIE POŁOŻENIA ŚRODKÓW CIĘŻKOŚCI BRYŁ NIEREGULARNYCH.

Środek ciężkości bryły wyznaczyć można metodą zawieszania bryły na linach. Załóżmy, że chcemy wyznaczyć odległość środka ciężkości C bryły *A* od punktu *O*. Do bryły *A* o ciężarze *G* podwieszamy dodatkowy ciężar *Q* jak na rys. 8.5. Równanie równowagi momentów względem punktu *O* ma postać: $Qa - Gh\sin\alpha = 0,$ stąd

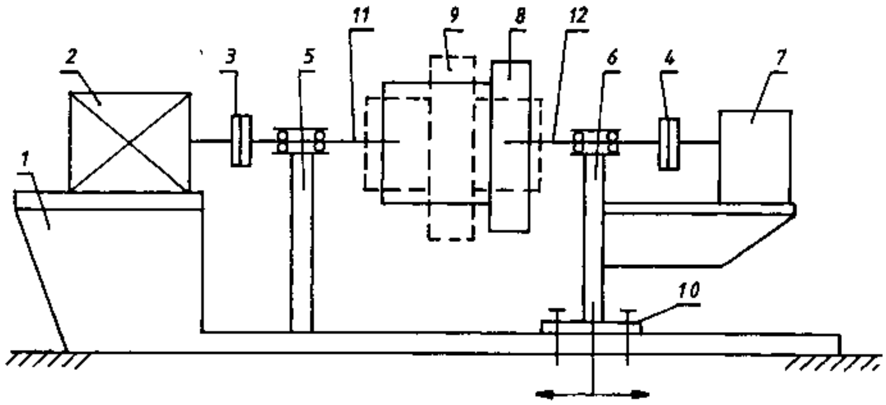
$$h = \frac{Qa}{G\sin\alpha} \tag{8.15}$$



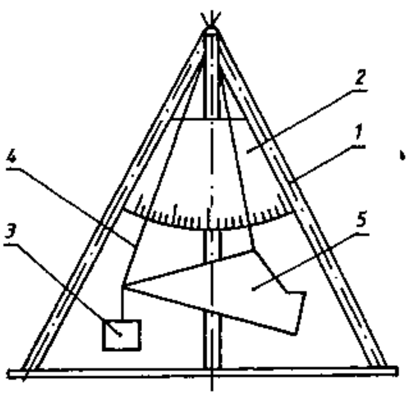
Rys. 8.5 Wyznaczanie środka ciężkości

8.3 OPIS STANOWISKA POMIAROWEGO ORAZ PRZEBIEG ĆWICZENIA

Stanowisko pomiarowe do wyznaczania momentów bezwładności zostało schematycznie przedstawione na rys. 8.6. Składa się ono z: 1 — ramy, 2 - silnika elektrycznego, 3 - sprzęgła I, 4 - sprzęgła II, 5 - podpory łożyskowej wału, 6 — przesuwnej podpory łożyskowej wału, 7 — prądnicy tachometrycznej (lub licznika obrotów), 8 — przedmiotu o momencie bezwładności /j, 9 — przedmiotów o momentach bezwładności 7_n, $/_m$, 10 - śrub mocujących podporę 6, 11, 12 — wałków



Rys. 8.6. Stanowisko pomiarowe



Rys. 8.7. Stanowisko pomiarowe do wyznaczania środka ciężkości bryły

Stanowisko pomiarowe do wyznaczania środka ciężkości bryły przedstawiono
rys. 8.7. Składa się ono z: 1 - stojaka, 2 - skali kątowej, 3 — obciążnika, 4 - cięgien, 5 - brył o nieznanym położeniu środka ciężkości

Przebieg wykonania ćwiczenia przedstawiono poniżej.

Metoda wybiegu

1) Założyć na końcówki wałków 11 i 12 przedmiot 8 o momencie bezwładności I_I, po czym zbliżyć maksymalnie podporę 6 w kierunku silnika 2 i dokręcić śruby 10.
   Uwaga! Punkt 1 wykonać, jeśli przedmiot 8 nie był założony wcześniej.
2) Włączyć silnik i czekać, aż osiągnie ustaloną prędkość kątową obserwując wskazania tachometru.
3) Zapisać prędkość obrotową n_0 odpowiadającą ω_0.
4) Wyłączyć silnik i jednocześnie włączyć stoper.
5) W momencie kiedy układ przestanie wirować, zatrzymać stoper.
6) Zapisać czas wybiegu $t_2 = t_n$.
7) Pomiar powtórzyć trzy razy.
8) Punkty 1-7 powtórzyć dla bryły o momencie bezwładności I_{II}, a potem dla bryły o momencie I_{III} .
9) Dokonać pomiaru wymiarów geometrycznych brył o momentach I_I, I_{II}, I_{III}, oraz wymiarów wałków 11 i 12. Zapisać te wymiary.
10) Zapisać wartość momentu bezwładności wirnika silnika i sprzęgła I_w .

Metoda wyznaczenia środków ciężkości brył

1) Zawiesić bryłę na cięgnach (jak na rys. 8.7).
2) Odczytać i zapisać wartości kątów wskazane przez cięgna na skali kątowej.
3) Obciążyć bryłę obciążnikiem Q (jak na rys. 8.5 lub 8.7).
4) Zmierzyć długość odcinka ***a*** (rys. 8.5), który jest odległością między punktem zaczepienia ciężaru Q i prostą pionową przechodzącą przez punkt zaczepienia cięgien.
5) Odczytać i zapisać wartości katów wskazane przez cięgna na skali kątowej.
6) Zważyć bryłę i obciążnik Q (o ile masy nie są podane).

Wykonanie sprawozdania

1) Narysować schemat stanowiska pomiarowego dla metody wybiegu.
2) Wyniki pomiarów i obliczeń dla tej metody zamieścić w poniższej tabelce:

Nr pomiaru	Prędkość obrotowa n_0 [obr/min]	Czas wybiegu T_p	Moment analityczny I_{Iobl} [kg-m²]	Moment z pomiaru I_I, [kg-m²]
1 2 3				

3) Wykonać obliczenia w następującej kolejności:
— obliczyć ε_0 według (8.13);
— wyznaczyć w celu sprawdzenia analityczny moment bezwładności I_{Iobl} korzystając ze wzoru (6.10);
— obliczyć moment bezwładności I_Y za pomocą wzoru (porównaj z (8.14)

$$I_I = \frac{M_S}{\varepsilon_0} - I_W$$

gdzie: M_s - średni moment tarcia, którego sposób wyznaczenia poda prowadzący ,
$I_W = 1.57 \cdot 10^{-4}$ [kgm²]- poprawka będąca wartością momentu bezwładności elementów wirujących stanowiska pomiarowego
— wyliczyć średni moment bezwładności .

4) Punkty 2) i 3) powtórzyć dla brył o momentach I_u i I_m.
5) Narysować schemat stanowiska (rys.8.7).
6) Zapisać wyniki pomiarów i obliczeń w tabelce podanej poniżej.

Nr bryły	Ciężar obciążnika Q [N]	Ciężar bryły G[N]	Kąty wyznaczone przez cięgno		α	a	h
			Przed obciążeniem α_P	po obciążeniu α_k	$\left\|\alpha_k - \alpha_p\right\|$	[m]	[m]
1 2 3							

7) Obliczyć wartość h dla każdej z brył wg zależności (8.15).
8)Opracować wnioski

LITERATURA

[1] *Leyko* /.: Mechanika ogólna. PWN, Warszawa 1969.
[2] *Osiński* Z: Mechanika ogólna. WPW, Warszawa 1977.
[3] *Rubinowicz W., Królikowski W.:* Mechanika teoretyczna. PWN, Warszawa 1977